

Řešená sbírka typových příkladů

Doprovodný materiál pro Integration Bee FJFI

Pravidla online kola

Předtím, než se pustíte do počítání typové sbírky příkladů, se prosím seznámte se základními pravidly kvalifikace, která probíhá distanční formou:

- **Formát testu:** Online kolo se skládá z rychlých integračních úloh s přímým zápisem výsledku.
- **Časový limit:** Celý test je striktně časově omezen na **30 minut**.
- **Samostatnost:** Očekává se čestné a samostatné vypracování. Používání pokročilých CAS systémů (např. Wolfram|Alpha) kazí smysl soutěže.
- **Postup do finále:** Celkem **16 nejlepších řešitelů** z online kola získá pozvánku na finálové vyřazovací kolo přímo na fakultě.
- **Dotazy a podpora:** Pokud by nastaly jakékoliv otázky, neváhejte se obrátit na e-mail **kurpiden@cvut.cz**.

***Upozornění k transparentnosti nominačního procesu:** Pořadatel si vyhrazuje právo na konečnou nominaci a sestavení finálové listiny účastníků. Ačkoliv je naším primárním zájmem zajištění maximální transparentnosti a objektivního posouzení všech dosažených výsledků, konečné rozhodnutí o postupu 16 nejlepších řešitelů spadá do výhradní diskreční pravomoci odborné komise Integration Bee FJFI. Toto rozhodnutí komise je konečné a z povahy soutěže na něj nevzniká právní nárok. V duchu fair-play jsme však plně připraveni jakékoliv případné dotazy či nejasnosti ohledně hodnocení otevřeně konzultovat na výše uvedené e-mailové adrese.*

Nutná teorie

Na úvod přikládáme některé užitečné věty ze skript Matematické Analýzy II prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. Doslovná znalost vět a důkazů není vyžadována, ale na paní prof. udělá jistě dojem. Alternativní znění s patřičným důkazem vítána.

Definice (Riemannův integrál)

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$ platí

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu I** a toto **číslo** značíme symbolem

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \text{zkráceně} \quad \int_a^b f.$$

O funkci f říkáme, že je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu I .

Věta (Newtonova formule)

Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že

- F je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
- $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \triangleq [F(x)]_a^b.$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce f a g jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$ a diferencovatelné v (a, b) . Když existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Věta (Substituce v určitém integrálu)

Nechť pro funkce f a φ platí

- φ je spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a diferencovatelná v (α, β) ,
- f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$.

Pak

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Typové příklady

Zde jsme si dovolili vložit pár základních příkladů z integrálního počtu. Příklady jsou brány ze sbírky Děmidoviče a seřazeny do následujících kategorií:

- 5 příkladů na využití Newtonovy formule
- 5 příkladů na využití per partes v určitém integrálu
- 5 příkladů na substituci
- 5 integrálů s méně obvyklými funkcemi.

Příklady v online testu by se neměly typově ani obtížnostně lišit, ideální čas na vyřešení by se tedy měl pohybovat kolem jedné až dvou minut. Integrály na finále nebudou početně náročnější, ale daleko kreativnější.

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4} dx$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4} dx = \int_0^1 \frac{\cancel{1-x^2}}{(1+x^2)(\cancel{1-x^2})} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \sqrt{\frac{x-2}{x^3-2x^2+x-2}} dx$$

Řešení:

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \sqrt{\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x^2+1)}} dx = \int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsinh}(\sinh 2) - \operatorname{arsinh}(\sinh 1) = 2 - 1 = 1$$

$$\int_{-1}^{-2} \frac{(1-\sin^2 x)(\tan^2 x + 1)}{x} dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-2} \frac{(1-\sin^2 x)(\tan^2 x + 1)}{x} dx &= \int_{-1}^{-2} \frac{\cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right)}{x} dx = \int_{-1}^{-2} \frac{\cancel{\cos^2 x} \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}{x} dx = - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln |-2| - \ln |-1| = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$$

Řešení: Rozkladem na parciální zlomky dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx &= \left[\ln|x+1| + \ln|x+2| \right]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{2x+5}{x^2+4x+3} dx$$

Řešení: Rozkladem na parciální zlomky dostáváme:

$$\int_0^2 \frac{3/2}{x+1} dx + \int_0^2 \frac{1/2}{x+3} dx = \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 = \ln 3 + \ln \sqrt{5} - \ln \sqrt{3} = \ln \sqrt{15}$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx &= \left[x^2 \sin x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin x dx \\ &= 0 + \left[2x \cos x \right]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx = 4\pi - 0 = 4\pi \end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \arctan x \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3\pi}{6} - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} 1 dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx &= - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= - \left[x \ln x - x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[x \ln x - x \right]_1^e \\ &= - \left(-1 - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) \right) + ((e - e) - (0 - 1)) = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 - \left[e^{-x} \right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{3x} dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} x e^{3x} dx &= \left[\frac{1}{3} x e^{3x} \right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{3} \int_0^{\ln 2} e^{3x} dx \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \left[\frac{1}{9} e^{3x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Řešení: Posloucháme zpětnou vazbu a souhlasíme, tento příklad je do online testu nevhodný.

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

Řešení: Substitucí $t = \sqrt{e^x - 1}$ přejde integrál na tvar:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt \\ &= 2 \int_0^1 1 dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 - 2 \arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Řešení: Goniometrickou substitucí $x = \sin t$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos^2 t \cdot \cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \left[\tan t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Řešení: Substitucí $x = \sin t$ a následně $y = \cos t$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^5 t}{\cos t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 t)^2 \sin t dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - y^2)^2 dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy \\ &= \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{53}{480} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$$

Řešení: Substitucí $t = 1 + 2x^2$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} dx &= \int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \left[\sqrt{t} \right]_1^3 = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx$$

Řešení: Vzhledem k průběhu znaménka funkce $x - x^3$ na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ rozdělíme integrál následovně:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx &= \int_0^1 1 \, dx + \int_1^3 (-1) \, dx \\ &= \left[x \right]_0^1 - \left[x \right]_1^3 = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} \right) = -\frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \cos^4 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \cos^4 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(1 + \cos^2 x)(1 - \cos^2 x)}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 2 \end{aligned}$$

$$\int_\mu^{+\infty} (x + \mu)^2 e^{-(x-\mu)} \, dx$$

Řešení: Substitucí $t = x - \mu$ a využitím vlastností Gama funkce $\Gamma(n)$ dostáváme:

$$\int_\mu^{+\infty} (x + \mu)^2 e^{-(x-\mu)} \, dx = \int_0^{+\infty} (t + 2\mu)^2 e^{-t} \, dt = \Gamma(3) + 4\mu\Gamma(2) + 4\mu^2\Gamma(1) = 2 + 4\mu + 4\mu^2$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x} \cos(\pi x) dx$$

Řešení: S využitím známého integrálu dostáváme:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \implies \int_0^{+\infty} e^{-\pi x} \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{\pi^2 + \pi^2} = \frac{1}{2\pi}$$

Proč vztah platí? Přechodem do komplexního oboru:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx + i \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a-ib)x} dx = \left[\frac{e^{-(a-ib)x}}{-(a-ib)} \right]_0^\infty = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

Porovnáním reálných částí získáme:

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(a-ib)x} dx \right) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$$